Acta Sci. Math., 43 (1981), 311—319

Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen

L. LEINDLER und H. SCHWINN

Einleitung

Für Orthogonalreihen (OR) $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x)$, wo $\{a_\nu\}$ eine reelle Zahlenfolge und $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein im Intervall $(0, 1)$ orthonormiertes Funktionensystem (ONS) ist, sind die (C, α)-Mittel $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha > -1)$ definiert durch

$$\sigma_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

mit $A_m^{(\alpha)} = \binom{m+\alpha}{m}$. Die gegebene OR heißt $|C, \alpha|$-summierbar, wenn in $(0, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)| < \infty$$

gilt. (Die betreffenden Konvergenzaussagen sind stets im Sinne „fast überall" zu verstehen.)

K. TANDORI [4] hat folgendes Kriterium nachgewiesen:

Satz A. *Damit die* OR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *für jedes* ONS $\{\varphi_n(x)\}$ $|C, 1|$-*summierbar ist, ist die Bedingung*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2 \right\}^{1/2} < \infty \tag{1}$$

notwendig und hinreichend.

Später hat der erste der Verfasser in [1] (Satz I) gezeigt, daß (1) auch für die $|C, \alpha|$-Summierbarkeit von OR im Falle $\alpha > \frac{1}{2}$ eine notwendige und hinreichende

Eingegangen am 29. Dezember 1980.

Diese Arbeit wurde verfaßt, während der erste Autor als Gastprofessor mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft am Mathematischen Institut Gießen arbeitete.

Bedingung im oben genannten Sinne abgibt. Er hat dort ferner folgende Sätze bewiesen (Satz II, Satz IV).

Satz B. *Damit die* OR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *für jedes* ONS $|C, \alpha|$*-summierbar ist, ist*

(2) $$\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m} \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2 \right\}^{1/2} < \infty \quad \text{im Falle} \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{bzw.}$$

(3) $$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m/2(1-2\alpha)} \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2 \right\}^{1/2} < \infty \quad \text{im Falle} \quad -1 < \alpha < \frac{1}{2}$$

eine hinreichende Bedingung. Für monotone Koeffizientenfolgen sind (2) *bzw.* (3) *auch notwendig, falls die Summierbarkeit für alle* ONS $\{\varphi_n(x)\}$ *gefordert wird.*

Satz C. *Es gelte* $0 \leqq \lambda_m \uparrow \infty$ *und* $0 \leqq \alpha$. *Dann gibt es eine nichtnegative Koeffizientenfolge* $\{d_n\}$ *derart, daß*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \left\{ \sum_{n=2^m+}^{2^{m+1}} d_n^2 \right\}^{1/2} = \infty$$

gilt, die OR $\sum_{n=0}^{\infty} d_n \varphi_n(x)$ *aber trotzdem für jedes* ONS $|C, \alpha|$*-summierbar ist.*

Satz C besagt auch, daß (2) bzw. (3) keine notwendigen Bedingungen für die $|C, \alpha|$-Summierbarkeit $\left(0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}\right)$ von OR sein können. Es stellt sich die Frage, ob durch eine geeignetere, feinere Koeffizienten-Paketierung als durch die Folge $\{2^m\}$ in (2) und (3) die Faktoren $\sqrt{m}$ bzw. $2^{m/2(1-2\alpha)}$ weggelassen werden können, ohne die Aussage des Satzes einzuschränken. Auf diesem Wege konnte folgendes Ergebnis von V. A. Spevakov und A. B. Kudryavtsev [3] über die absolute Euler-Summierbarkeit verbessert werden.

Satz D. *Falls*

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i/4} \left\{ \sum_{n=2^i+1}^{2^{i+1}} a_n^2 \right\}^{1/2} < \infty,$$

ist $\sum c_n \varphi_n(x)$ $\left|E, \frac{1}{2}\right|$*-summierbar. Diese Bedingung ist für monoton fallende* $\{|a_n|\}$ *auch notwendig, damit* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *für alle* ONS $\{\varphi_n(x)\}$ $\left|E, \frac{1}{2}\right|$*-summierbar ist.*

Der zweite Verfasser hat in [2] gezeigt:

Satz E. *Die* OR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *ist genau dann für jedes* ONS $\{\varphi_n(x)\}$ $|E, q|$*-summierbar* $(0 < q < 1)$, *falls*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=i^2}^{(i+1)^2-1} a_n^2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Auch für die (C, α)-Verfahren können wir zeigen:

Satz. *Damit die* OR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *für jedes* ONS $|C, \alpha|$*-summierbar ist, ist*)*

(4) $$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=2^{\sqrt{m}}+1}^{2^{\sqrt{m+1}}} a_n^2 \right\}^{1/2} < \infty \quad \text{im Falle} \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{bzw.}$$

(5) $$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=m^{1/(1-2\alpha)}}^{(m+1)^{1/(1-2\alpha)}} a_n^2 \right\}^{1/2} < \infty \quad \text{im Falle} \quad 0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$$

eine hinreichende Bedingung.

Bemerkung 1. Sind Bedingungen (2) bzw. (3) erfüllt, so auch (4) bzw. (5). Z. B. folgt für $\alpha = \frac{1}{2}$ mit der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=2^{\sqrt{m}}+1}^{2^{\sqrt{m+1}}} a_n^2 \right\}^{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k^2}^{(k+1)^2-1} \left\{ \sum_{n=2^{\sqrt{m}}+1}^{2^{\sqrt{m+1}}} a_n^2 \right\}^{1/2} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k} \left\{ \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} a_n^2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Bemerkung 2. Falls $\{|a_n|\}$ monoton fallend ist, sind (2) und (4) (bzw. (3) und (5)) äquivalent. Deshalb sind in diesem Fall nach Satz B auch (4) und (5) notwendige Bedingungen. Die Äquivalenz gilt nicht für beliebige $\{a_n\}$. Die erste Aussage kann elementar gezeigt werden. Für die Nichtäquivalenz kann im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ das Beispiel dienen:

$$a_i = m^{-5/4} \quad \text{falls} \quad i = 2^{m+1}, \quad a_i = 0 \quad \text{sonst.}$$

Bemerkung 3. Die Bedingung (4) ist im allgemeinen nicht notwendig, damit $\sum a_n \varphi_n(x)$ für jedes ONS $\{\varphi_n(x)\}$ $\left|C, \frac{1}{2}\right|$-summierbar ist; denn es existiert eine (nichtmonotone) Koeffizientenfolge $\{a_n\}$, die (4) nicht genügt, wobei aber $\sum a_n \varphi_n(x)$ für jedes ONS $\{\varphi_n(x)\}$ $\left|C, \frac{1}{2}\right|$-summierbar ist. (Zur Vollständigkeit geben wir unten einen ausführlichen Beweis an.)

*) Für $a, b \in \mathbf{R}$ bedeutet $\sum_{n=a}^{b} \ldots = \sum_{n: a \leqq n \leqq b}$.

§ 1. Beweis des Satzes

I. Falls $\alpha=0$, lautet (5) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|<\infty$, und die Behauptung folgt sofort.

II. Wir setzen nun $\alpha>0$ voraus. Für die Darstellung

$$\sigma_{n+1}^{\alpha}(x)-\sigma_n^{\alpha}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} L_{n,\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x) + \frac{1}{A_{n+1}^{(\alpha)}} a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$$

gilt bekanntlich

$$d_1(\alpha)\frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{n^{\alpha+1}} \leqq |L_{n,\nu}^{(\alpha)}| \leqq d_2(\alpha)\frac{(n+1-\nu)^{\alpha-1}\nu}{n^{\alpha+1}} (\alpha>-1 \quad \text{und} \quad \alpha\neq 0).$$

Mit den Folgen

$$\mu_m^{(\alpha)} = 2^{\sqrt{m}} \quad \text{falls} \quad \alpha=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{m^{1-2\alpha}} \quad \text{falls} \quad 0<\alpha<\frac{1}{2},$$

$$\text{(6)} \qquad k_m^{(\alpha)} = \mu_{m+1}^{(\alpha)}-\mu_m^{(\alpha)}$$

und

$$A_m(\alpha) = \left\{\sum_{\nu=\mu_m^{(\alpha)}+1}^{\mu_{m+1}^{(\alpha)}} a_\nu^2\right\}^{1/2}$$

erhalten wir dann für ein festes α $\left(0<\alpha\leqq\frac{1}{2}\right)$ mit $\mu_m=\mu_m^{(\alpha)}$, $k_m=k_m^{(\alpha)}$, $A_m=A_m(\alpha)$

$$I^{(\alpha)} := \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx \leqq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}\int_0^1 |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x)|\,dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\mu_{m+1}-\mu_m}\left\{\sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}\int_0^1 (\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x)-\sigma_n^{(\alpha)}(x))^2\,dx\right\}^{1/2} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{k_m}\left\{\sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}\sum_{\nu=0}^{n}(L_{n,\nu}^{(\alpha)})^2 a_\nu^2 + \frac{a_{n+1}^2}{(A_{n+1}^{(\alpha)})^2}\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq C_1\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{k_m}\left\{\sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(n+1-\nu)^{2\alpha-2}\nu^2}{n^{2\alpha+2}}a_\nu^2\right\}^{1/2} + C_2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sqrt{k_m}}{\mu_m^{\alpha}}A_m.$$

Für $\alpha=\frac{1}{2}$ gilt nach dem Mittelwertsatz $(\sqrt{m}<\xi<\sqrt{m+1})$

$$\text{(7)} \qquad k_m = 2^{\sqrt{m+1}}-2^{\sqrt{m}} = 2^{\xi}\frac{\ln 2}{2}\frac{1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} \leqq C\frac{2^{\sqrt{m}}}{\sqrt{m}}$$

und für $0<\alpha<\frac{1}{2}$ besteht

$$k_m = (m+1)^{1/(1-2\alpha)}-m^{1/(1-2\alpha)} \leqq C' m^{2\alpha/(1-2\alpha)},$$

womit

$$
(8)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k_m}}{\mu_m^{\alpha}} A_m = O(1) & \left(0<\alpha<\dfrac{1}{2}\right) \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k_m}{\mu_m}} (\log \mu_{m+1})^{1/2} A_m = O(1) & \left(\alpha=\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}
$$

folgt. Damit ergibt sich weiter

$$
I^{(\alpha)} \leqq C_1 \sum_{m=0}^{\infty} \Bigg\{ k_m \sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} \sum_{k=0}^{m-2} \sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} \frac{(n+1-\nu)^{2\alpha-2}}{n^{2\alpha+2}} \nu^2 a_\nu^2 +
$$

$$
+ \sum_{\nu=\mu_{m-1}+1}^{\mu_m} \frac{(n+1-\nu)^{2\alpha-2}}{n^{2\alpha+2}} \nu^2 a_\nu^2 + \sum_{\nu=\mu_m+1}^{n} \frac{(n+1-\nu)^{2\alpha-2}}{n^{2\alpha+2}} \nu^2 a_\nu^2 \Bigg\}^{1/2} + O(1) \leqq
$$

$$
\leqq C_1 \sum_{m=0}^{\infty} \Bigg\{ k_m \sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} \sum_{k=0}^{m-2} \sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} \frac{(n+1-\nu)^{2\alpha-2}}{n^{2\alpha+2}} \nu^2 a_\nu^2 \Bigg\}^{1/2} +
$$

$$
+ C_1 \sum_{m=0}^{\infty} \Bigg\{ k_m \sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} \sum_{\nu=\mu_{m-1}+1}^{\mu_m} \frac{(n+1-\nu)^{2\alpha-2}}{n^{2\alpha+2}} \nu^2 a_\nu^2 \Bigg\}^{1/2} +
$$

$$
+ C_1 \sum_{m=0}^{\infty} \Bigg\{ k_m \sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} \sum_{\nu=\mu_m+1}^{n} \frac{(n+1-\nu)^{2\alpha-2}}{n^{2\alpha+2}} \nu^2 a_\nu^2 \Bigg\}^{1/2} + O(1) := \sum\nolimits_1^{(\alpha)} + \sum\nolimits_2^{(\alpha)} + \sum\nolimits_3^{(\alpha)} + O(1).
$$

Wieder gilt mit (8) $\sum_2^{(\alpha)} + \sum_3^{(\alpha)} < \infty$. Deshalb bleibt noch zu zeigen

$$
(9)\qquad \sum\nolimits_1^{(\alpha)} < \infty.
$$

(I) *Der Fall* $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Hier erhalten wir

$$
\sum\nolimits_1^{(1/2)} \leqq C_2 \sum_{m=0}^{\infty} \Bigg\{ k_m \sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\mu_k^2}{n^3} (\mu_m - \mu_{k+1})^{-1} A_k^2 \Bigg\}^{1/2} \leqq
$$

$$
\leqq C_2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu_k \left(\sum_{m=k+2}^{k+\sqrt{k}} + \sum_{m=k+\sqrt{k}+1}^{\infty} \right) \frac{k_m}{\mu_m^{3/2}} (\mu_m - \mu_{k+1})^{-1/2}.
$$

Für $m \geqq k + \sqrt{k} + 1$ erhalten wir wegen

$$
\mu_m - \mu_{k+1} \geqq 2^{\sqrt{m}} \left(1 - 2^{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+\sqrt{k}+1}}\right) \geqq C_3 2^{\sqrt{m}}
$$

mit (7)

$$
(10)\qquad \sum_{m=k+\sqrt{k}+1}^{\infty} \frac{k_m}{\mu_m^{3/2}} (\mu_m - \mu_{k+1})^{-1/2} \leqq C_4 \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}\, 2^{\sqrt{m}}} \leqq \frac{C_5}{2^{\sqrt{k}}}.
$$

Für $k+2\leqq m\leqq k+\sqrt{k}$ gilt wegen $2^{\sqrt{k+\sqrt{k}}}/2^{\sqrt{k}}\leqq C_6$ und

$$\mu_m-\mu_{k+1}=(m-k-1)\frac{\ln 2}{2\sqrt{\zeta}}2^{\sqrt{\zeta}}\geqq C_7\frac{m-k}{\sqrt{k}}2^{\sqrt{k}}\quad k<\zeta<m: \tag{11}$$

$$\sum_{m=k+2}^{k+\sqrt{k}}\frac{k_m}{\mu_m^{3/2}}(\mu_m-\mu_{k+1})^{-1/2}\leqq C_8\frac{4^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}\,2^{\sqrt{k}}}\sum_{m=k+2}^{k+\sqrt{k}}\frac{1}{\sqrt{m-k}}\leqq\frac{C_9}{2^{\sqrt{k}}}.$$

Dies liefert mit (10)

$$\sum\nolimits_1^{(1/2)}\leqq C_2\sum_{k=0}^{\infty}A_k\mu_k\frac{(C_9+C_5)}{2^{\sqrt{k}}}<\infty,$$

womit (9) im Falle $\alpha=\frac{1}{2}$ nachgewiesen ist.

(II) *Der Fall* $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Aufgrund von $k_m\leqq C_{10}m^{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}}$ gilt hier

$$\sum\nolimits_1^{(\alpha)}\leqq C_{11}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\mu_m^2}\sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}}\sum_{k=0}^{m-2}\sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}}(n+1-\nu)^{2\alpha-2}\nu^2a_\nu^2\right\}^{1/2}\leqq$$

$$\leqq C_{12}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{m^{\frac{2(\alpha-1)}{1-2\alpha}}\sum_{k=0}^{m-2}\mu_k^2\sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}}(\mu_m-\nu)^{2\alpha-2}a_\nu^2\right\}^{1/2}\leqq \tag{12}$$

$$\leqq C_{12}\sum_{k=0}^{\infty}A_k\mu_k\sum_{m=k+2}^{\infty}m^{\frac{\alpha-1}{1-2\alpha}}(\mu_m-\mu_{k+1})^{\alpha-1}.$$

Wegen $\mu_m-\mu_{k+1}\geqq C_{13}(m-k)k^{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}}$ erhalten wir

$$\sum_{m=k+2}^{2k}m^{\frac{\alpha-1}{1-2\alpha}}(\mu_m-\mu_{k+1})^{\alpha-1}\leqq C_{14}k^{\frac{2\alpha(\alpha-1)}{1-2\alpha}}\sum_{m=k+2}^{2k}m^{\frac{\alpha-1}{1-2\alpha}}(m-k)^{\alpha-1}\leqq$$

$$\leqq C_{15}k^{\frac{2\alpha(\alpha-1)}{1-2\alpha}+\frac{\alpha-1}{1-2\alpha}+\alpha}=C_{15}k^{\frac{-1}{1-2\alpha}};$$

$$\sum_{m=2k+1}^{\infty}m^{\frac{\alpha-1}{1-2\alpha}}(\mu_m-\mu_{k+1})^{\alpha-1}\leqq C_{16}k^{\frac{2\alpha(\alpha-1)}{1-2\alpha}}\sum_{m=2k+1}^{\infty}m^{\frac{\alpha-1}{1-2\alpha}}m^{\alpha-1}\leqq C_{17}k^{\frac{-1}{1-2\alpha}}.$$

Die beiden letzten Aussagen ergeben nach (12) die Beziehung (9) auch für $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Der Satz von B. Levi liefert dann für $0<\alpha\leqq\frac{1}{2}$ die Aussage des Satzes.

§ 2. Beweis der Bemerkung 3

Wir setzen mit $\mu_m = [2\sqrt{m}]$*)

$$a_k = 0 \quad \text{für} \quad k \neq \mu_m \quad (m = 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad k = \mu_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 15;$$

$$a^2_{\mu_{i^2+j}} = \frac{1}{(j+1)(i+1)^3} \quad \text{für} \quad i = 4, 5, \ldots; \; j = 0, 1, \ldots, 2i.$$

Dann gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} a_k^2 \right\}^{1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} |a_{\mu_m}| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=i^2}^{(i+1)^2-1} |a_{\mu_m}| \geqq K \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty,$$

d. h. (4) ist verletzt. Wir zeigen, daß jedoch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ für jedes ONS $\{\varphi_n(x)\}$ $\left|C, \frac{1}{2}\right|$-summierbar ist. Diese Behauptung folgt sofort, falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |\sigma_n^{(1/2)}(x) - \sigma_{n-1}^{(1/2)}(x)| \, dx < \infty \tag{13}$$

nachgewiesen ist.

Es sei im folgenden $(\mu_{i^2} =) 2^i \leqq n < 2^{i+1} (= \mu_{(i+1)^2})$ $(i \geqq 4)$, etwa $\mu_j \leqq n < \mu_{j+1}$ für ein j mit $i^2 \leqq j < (i+1)^2$. Wir betrachten dann (vgl. § 1)

$$I_n := \int_0^1 |\sigma_n^{(1/2)}(x) - \sigma_{n-1}^{(1/2)}(x)| \, dx \leqq K_1 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} (L_{n-1,\nu}^{(1/2)})^2 a_\nu^2 + \frac{a_n^2}{(A_n^{(1/2)})^2} \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq K_2 \left\{ \sum_{m=0}^{j} \frac{\mu_m^2}{n^3(n-\mu_m+1)} a_{\mu_m}^2 \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq K_2 \left(\left\{ \sum_{m=0}^{(i-1)^2-1} \frac{\mu_m^2 a_{\mu_m}^2}{n^3(n-\mu_m+1)} \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{m=(i-1)^2}^{i^2-1} \frac{\mu_m^2 a_{\mu_m}^2}{n^3(n-\mu_m+1)} \right\}^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \sum_{m=i^2}^{j-1} \frac{\mu_m^2}{n^3(n-\mu_m+1)} a_{\mu_m}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \frac{\mu_j^2 a_{\mu_j}^2}{n^3(n-\mu_j+1)} \right\}^{1/2} \right)$$

$$=: K_2 (I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)} + I_n^{(4)}) \tag{14}$$

(dabei sei $I_n^{(3)} := 0$, falls $j = i^2$).

(I) Wir erhalten zuerst für $I_n^{(1)}$ wegen $n - \mu_m + 1 \geqq 2^{i-1}$

$$I_n^{(1)} \leqq \frac{K_3}{2^{2i}} \left\{ \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{m=k^2}^{(k+1)^2-1} \mu_m^2 a_{\mu_m}^2 \right\}^{1/2} \leqq \frac{K_3}{2^{2i}} \sum_{k=0}^{i-2} 2^k \left\{ \sum_{m=k^2}^{(k+1)^2-1} a_{\mu_m}^2 \right\}^{1/2}$$

---

*) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=2^i}^{2^{i+1}-1} I_n^{(1)} \leqq K_3 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{k=0}^{i-2} 2^k \left\{ \sum_{m=k^2}^{(k+1)^2-1} a_{\mu_m}^2 \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq K_3 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=k^2}^{(k+1)^2-1} a_{\mu_m}^2 \right\}^{1/2} 2^k \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty, \tag{15}$$

da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=k^2}^{(k+1)^2-1} a_{\mu_m}^2 \right\}^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{(m-k^2+1)(k+1)^3} \right\}^{1/2} \leqq K_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln 2k}{k^{3/2}} < \infty.$$

(II) Ähnliche wie in (11) erhalten wir bei $I_n^{(2)}$ für $(i-1)^2 \leqq m < i^2 \leqq j < (i+1)^2$

$$n-\mu_m+1 \geqq \mu_j - \mu_m \geqq \mu_{i^2} - \mu_m \geqq \frac{(i^2-m)}{\sqrt{m}} 2^{\sqrt{m}}$$

$$\text{und mit } \mu_{j+1} - \mu_j = O\left(\frac{2^i}{i}\right) \quad \left(i^2 < j < (i+1)^2\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^i}^{2^{i+1}} I_n^{(2)} &= \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} \sum_{n=\mu_j}^{\mu_{j+1}} I_n^{(2)} \leqq \frac{K_5}{2^{i/2}} \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} \sum_{n=\mu_j}^{\mu_{j+1}-1} \left\{ \sum_{m=(i-1)^2}^{i^2-1} \frac{a_{\mu_m}^2}{n+1-\mu_m} \right\}^{1/2} \leqq \\ &\leqq \frac{K_6}{2^{i/2}} \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\{ \sum_{n=\mu_j}^{\mu_{j+1}-1} \sum_{m=(i-1)^2}^{i^2-1} \frac{\sqrt{m}}{2^{\sqrt{m}}(i^2-m)} \cdot \frac{1}{\left(m-(i-1)^2+1\right) i^3} \right\}^{1/2} \leqq \\ &\leqq \frac{K_7 \cdot \sqrt{i}}{2^i \cdot i^{3/2}} \cdot \frac{2^i}{i} \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\{ \sum_{k=0}^{2i-2} \frac{1}{(2i-1-k)(k+1)} \right\}^{1/2} \leqq \\ &\leqq \frac{K_7(2i+1)}{i^2} \left\{ \sum_{k=0}^{2i-2} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2i-1-k} + \frac{1}{k+1} \right) \right\}^{1/2} \leqq \frac{K_8 \sqrt{\ln 2i}}{i^{3/2}}. \end{aligned} \tag{16}$$

(III) Für $I_n^{(3)}$ erhalten wir analog

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^i}^{2^{i+1}-1} I_n^{(3)} &= \sum_{n=\mu_{i^2}+1}^{\mu_{(i+1)^2-1}} I_n^{(3)} \leqq \frac{K_9}{2^{i/2}} \sum_{j=i^2+1}^{(i+1)^2-1} \sum_{n=\mu_j}^{\mu_{j+1}-1} \left\{ \sum_{n=i^2}^{j-1} \frac{a_{\mu_m}^2}{\mu_j - \mu_m} \right\}^{1/2} \leqq \\ &\leqq \frac{K_{10}}{2^{i/2}} \frac{2^i}{i} \sum_{j=i^2+1}^{(i+1)^2-1} \left\{ \sum_{m=i^2+1}^{j-1} \frac{\sqrt{m}}{2^{\sqrt{m}}(j-m)} \frac{1}{(m-i^2+1)(i+1)^3} \right\}^{1/2} \leqq \\ &\leqq \frac{K_{11}}{\sqrt{i}} \sum_{j=i^2+1}^{(i+1)^2-1} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1-i^2} \frac{1}{(k+1)\left(j-(i^2+k)\right)(i+1)^3} \right\}^{1/2} \leqq \\ &\leqq \frac{K_{11}}{i^2} \sum_{j=i^2+1}^{(i+1)^2-1} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1-i^2} \frac{1}{j-i^2+1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{j-i^2-k} \right) \right\}^{1/2} \leqq \frac{K_{12} \sqrt{\ln 2i}}{i^{3/2}}. \end{aligned} \tag{17}$$

(IV) Schließlich gilt

$$\sum_{n=2^i}^{2^{i+1}-1} I_n^{(4)} \leqq \frac{K_{13}}{2^{i/2}} \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} \sum_{n=\mu_j}^{\mu_{j+1}-1} \frac{|a_{\mu_j}|}{\sqrt{n+1-\mu_j}} =$$

$$(18) \qquad = \frac{K_{13}}{2^{i/2}} \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} |a_{\mu_j}| \sum_{n=\mu_j}^{\mu_{j+1}-1} \frac{1}{\sqrt{n+1-\mu_j}} \leqq \frac{K_{14}}{2^{i/2}} \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} |a_{\mu_j}| \sqrt{\mu_{j+1}-\mu_j} \leqq$$

$$\leqq \frac{K_{15}}{2^{i/2}} \cdot \sqrt{\frac{2^i}{i}} \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\{ \frac{1}{(j+1-i^2)(i+1)^3} \right\}^{1/2} \leqq \frac{K_{16}}{i^{3/2}}.$$

(V) Nach (15), (16), (17) und (18) gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)} + I_n^{(4)}) < \infty$$

womit (vgl. (14)) (13) und die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Literaturverzeichnis

[1] L. Leindler, Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 243—268.

[2] H. Schwinn, Absolute summability of orthogonal series by Euler-means, *Analysis* (zu erscheinen).

[3] V. N. Spevakov and A. B. Kudryavtsev, Absolute summability of orthogonal series by Euler's method, *Math. Notes* **21** (1977), 29-32.

[4] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen IX (absolute Summation), *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 292—299.

(L. L.)
BOLYAI INSTITUTE
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, HUNGARY

(H. SCH.)
MATHEMATISCHES INSTITUT
ARNDTSTRASSE 2
6300 GIESSEN, GERMANY